LC-Schwingkreis

Fluxion Dokumentinfo

1 Theorie - Experiment

Wir betrachten einen elektromagnetischen Schwingkreis bestehend aus einem idealen Kondensator mit Kapazität C und einer idealen Spule mit Induktivität L (siehe Abb.1).

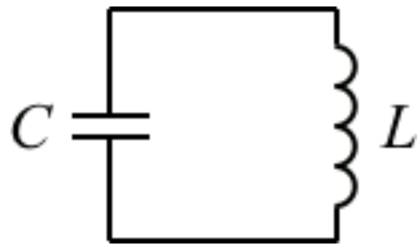

Abb. 1: LC-Schwingkreis

Zum Start des Schwingungsvorgangs wird der Kondensator durch Anlegen einer Batteriespannung mit einer Anfangsladung versehen, diese sei gegeben durch

$$Q_0 = C \cdot U_b \tag{1}$$

Die praktische Realisierung des Ladevorgangs kann mit einem Umschalter erfolgen (Abb. 2).

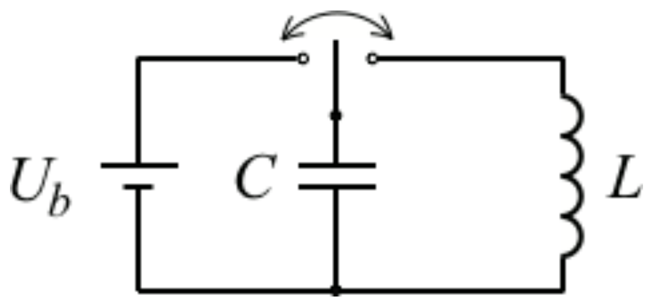

Abb. 2: Umschalter zum Aufladen

Alternativ könnte auch ein Anfangsstrom durch die Spule vorgegeben werden.

Ausgehend von der Anfangsladung entlädt sich der Kondensator über die Spule und es baut sich ein magnetisches Feld auf. Nach vollständiger Entladung des Kondensators ist die gesamte Energie im Magnetfeld der Spule gespeichert und der Prozess kehrt sich um. Es wird periodisch Energie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld ausgetauscht und es herrscht abwechselnd eine hohe Ladung (Spannung) oder ein hoher Strom.

2 Berechnungsgrundlagen – DGL – Modellgleichungen

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Ladung und Stromstärke ist gegeben durch:

$$\boxed{Q' = I} \tag{2}$$

(In Fluxion steht Q' als Ableitung von Q nach der aktuellen Laufvariablen also hier der Zeit!)

Nach der Maschenregel (siehe Abb.3) gilt für die Spannungen:

$$U_C + U_L = 0 \tag{3}$$

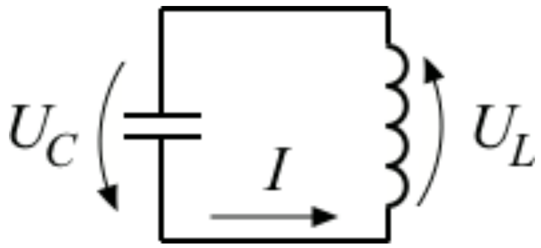

Abb. 3: Maschenregel

Mit den Spannungen

$$U_C = \frac{Q}{C} \tag{4}$$

$$U_L = L \cdot I' \tag{5}$$

eingesetzt in (3) und umgeformt erhält man

$$\boxed{I' = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot Q} \tag{6}$$

Die Gleichungen (2) und (6) beschreiben (zusammen mit den gewählten Anfangswerten) den Schwingungsvorgang vollständig und sie sind auch die relevanten Modellgleichungen für die Berechnungen in Fluxion.

Anmerkungen und Hintergrundinformationen:

1) Bekanntlich wird ja der LC-Schwingkreis durch eine DGL zweiter Ordnung beschrieben. Diese erhält man auch wenn man (2) in (6) einsetzt: $(Q')' = Q'' = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot Q$.
Fluxion kann generell nur DGLen erster Ordnung bearbeiten aber auch Systeme davon. Wie die Mathematik allgemein zeigt, sind DGLen höherer Ordnung in Systeme von DGLen erster Ordnung überführbar. Am Bsp. LC-Schwingkreis sieht man, wie das umzusetzen ist.

2) Die Spannung an der Spule wird durch das Induktionsgesetz bestimmt. Dabei bereitet das Vorzeichen permanent Schwierigkeiten. Warum steht bei der Spulenspannung (5) kein Minuszeichen?
Nur kurz (Induktion in der Spule ist vergleichbar mit dem chemischen Antrieb in einer Batterie): Die außen gemessene Spannung und das zugehörige äußere E-Feld ist entgegen dem induzierten E-Feld in der Spule bzw. dem chemischen „Antriebsfeld“ in der Batterie gerichtet.

Um diese Vorzeichenprobleme erst gar nicht aufkommen zu lassen, kann man die Berechnungsgleichungen über Energiebetrachtungen gewinnen, wie im Anschluss gezeigt.

3 Alternative – Energieansatz – DGL und Modellgleichungen

Im idealen LC-Schwingkreis gilt Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot LI^2 = E_{gesamt} = const. \qquad (7)$$

Leitet man (7) nach der Zeit ab, erhält man

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot 2 \cdot Q \cdot Q' + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot I \cdot I' = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{1}{C} \cdot Q \cdot Q' + L \cdot I \cdot I' = 0 \qquad (9)$$

Mit (2) folgt

$$\frac{1}{C} \cdot Q \cdot Q' + L \cdot Q' \cdot (Q')' = 0 \qquad (10)$$

$$Q' \cdot \left(\frac{1}{C} \cdot Q + L \cdot (Q')' \right) = 0 \qquad (11)$$

Da bei einer Schwingung die Ladungsänderung ungleich Null ist, muss die Klammer Null werden und man erhält die DGL des LC-Schwingkreises

$$Q'' = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot Q \qquad (12)$$

Für den Einsatz mit Fluxion muss man diese DGL (12) wieder in ein System umwandeln entsprechend (2) und (6).