Gekoppeltes Pendel ohne Kleinwinkelnäherung

Fluxion Projektinfo

1 Hintergrund

Zunächst definieren wir einige wichtige Größen und Abmessungen:

- l = Strecke bis zur Befestigung der Feder
- L = Pendellänge
- k = Federhärte
- m = Masse der Kugeln
- ϕ_1, ϕ_2 = Auslenkwinkel

Die Stäbe und die Feder werden als masselos betrachtet. Außerdem soll, wenn sich beide Pendel in der Ruhelage befinden keine Kraft durch die Feder wirken (Definition der Ruhelage).
Um nun die Bewegungsgleichungen für das System zu erhalten wählen wir einen Drehmomentansatz. Diesem liegt das Analogon zum zweiten Newtonschen Gesetz zu Grunde.

$$\vec{M} = J \cdot \dot{\vec{\omega}} \tag{1}$$

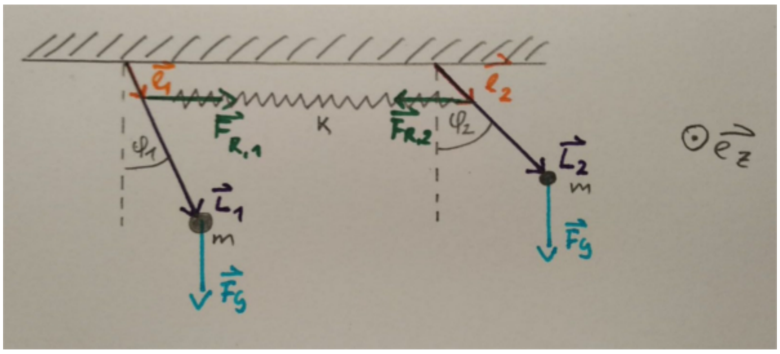
Vgl.

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}} \tag{2}$$

Streng genommen müsste auch noch eine zeitabhänige Masse m bzw. ein zeitabhäniges Trägheitsmoment J beachtet werden, in den meisten Fällen sind diese Größen allerdings konstant.
Vektoriell gilt für das Drehmoment, welches durch eine Kraft F am Angriffspunkt r verursacht wird:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot sin(\phi) \cdot \hat{e} \tag{3}$$

Wobei e ein Einheitsvektor ist, welcher senkrecht auf den Vektoren r und F steht.
Folgende Skizze zeigt die Position der verwendeten Vektoren. Die z-Achse zeigt aus dem Bildschirm heraus. Der Vektor $\vec{e_z}$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung.



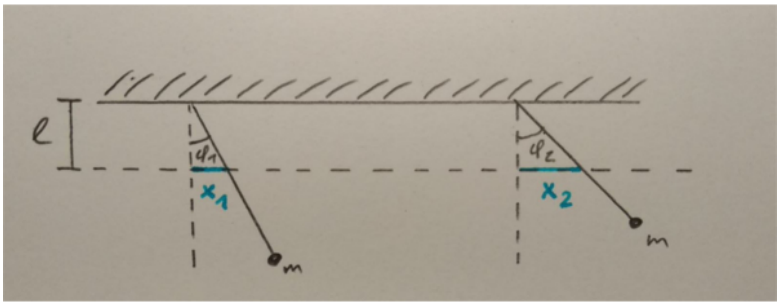
Wir betrachten nun die wirkenden Drehmomente auf das linke Pendel. Es gilt:

$$\vec{M_1} = \vec{L_1} \times \vec{F_g} + \vec{l_1} \times \vec{F_{R,1}} = -m \cdot g \cdot L \cdot sin(\phi_1) \cdot \vec{e_z} + l \cdot F_{R,1} \cdot sin(\frac{\pi}{2} - \phi_1)\vec{e_z} \tag{4}$$

Wobei F_g die Gewichtskraft der Punktmasse am Ende des Stabs und $F_{R,1}$ die von der Feder ausgeübte Rückstellkraft ist. Nach Gleichung 3 kann diese wie bereits geschehen umgeschrieben werden. Hierbei muss beachtet werden, dass der Winkel zwischen $F_{R,1}$ und l_1 nicht ϕ_1 sondern $\frac{\pi}{2} - \phi_1$ beträgt!
Nun müssen wir noch $F_{R,1}$ ermitteln. Allgemein ist diese Kraft gegeben durch:

$$F_{R,1} = k \cdot x_{ges} \tag{5}$$

Wobei x_{ges} die Gesamtauslenkung aus der Ruhelage ist. Diese ist offensichtlich die Differenz der rechten Auslenkung x_2 und der linken Auslenkung x_1. Folgende Skizze hilft bei der Bestimmung dieser Größen: Unter der Annahme, dass die Rückstellkraft der Feder stets unter einem 90°



Winkel angreift (sonst wird es schnell sehr kompliziert) folgern wir für die Größen x_1 und x_2:

$$x_1 = l \cdot tan(\phi_1) \tag{6}$$

$$x_2 = l \cdot tan(\phi_2) \tag{7}$$

Bauen wir nun alles zusammen, so erhalten wir:

$$J \cdot \dot{\vec{\omega_1}} = -m \cdot g \cdot L \cdot sin(\phi_1) \cdot \vec{e_z} + l^2 \cdot k \cdot (tan(\phi_2) - tan(\phi_1)) \cdot sin(\frac{\pi}{2} - \phi_1) \cdot \vec{e_z} \tag{8}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\vec{e_z}$ ($\dot{\vec{\omega_1}}$ zeigt per Definition in $\vec{e_z}$ Richtung) und teilen noch durch J, so erhalten wir unsere erste Gleichung für die Winkelbeschleunigung:

$$\dot{\omega_1} = (-m \cdot g \cdot L \cdot sin(\phi_1) + l^2 \cdot k \cdot (tan(\phi_2) - tan(\phi_1)) \cdot sin(\frac{\pi}{2} - \phi_1))/J \tag{9}$$

Analog folgt sofort die Beziehung für die zweite Winkelbeschleunigung. Wir müssen lediglich beachten, dass die Rückstellkraft nun in die entgegengesetzte Richtung zeigt und dementsprechend ein Drehmoment in die andere Richtung ausübt:

$$\dot{\omega_2} = (-m \cdot g \cdot L \cdot sin(\phi_2) - l^2 \cdot k \cdot (tan(\phi_2) - tan(\phi_1)) \cdot sin(\frac{\pi}{2} - \phi_2))/J \tag{10}$$

Jezt können wir das Analogon zur Newton Maschine für Drehbewegungen verwenden, d.h. Winkelgeschwindigkeit ist Änderungsrate des Winkels und Änderungsrate der Änderungsrate ist die Beschleunigung.
Als letztes benötigen wir noch das Trägheitsmoment einer Punktmasse (wir gehen ja davon aus, dass die Masse am Ende des Stabes konzentriert ist):

$$J = m \cdot L^2 \tag{11}$$

2 Welche Fälle können nun eintereten

Die Startbedingungen der Pendel können auf drei verschiedene Arten gewählt werden. Je nachdem kommt es dann zu einem unterschiedlichen Schwingungsverhalten:

- **Gleichsinnige Schwingung**: Am Anfang werden beide Pendel mit gleicher Auslenkung versehen ($\phi_1 = \phi_2$) - wie erwarte wird die Feder nicht gespannt und es kommt zu einer (langweiligen) normalenSSchwingung
- **Gegensinnige Schwingung**: Am Anfang werden beide Pendel mit genau entgegensetzter Auslenkung versehen ($\phi_1 = -\phi_2$), dann schwingen die Pendel wieder mit gleicher Amplitude, aber entgegengesetzt
- **Schwebungsfall**: Dies ist der interessanteste Fall. Wird am Anfang nur eines der beiden Pendel ausgelenkt ($\phi_1 = a, \phi_2 = 0$), so tauschen die Pendel im Lauf der Schwingung ihre Energie. (Dies ist die Standardeinstellung des Projekts.)