

Kepler Bahnen

Newton II Projektinfo

1 Physikalischer Hintergrund

In diesem Simulationsdokument beschäftigen wir uns mit der Bewegung einer vergleichsweise kleinen Masse im Gravitationsfeld einer sehr viel Größeren Masse. Wie bei jedem Newton Projekt müssen wir zunächst Beziehungen für die Kräfte finden und diese dann in eine x- und y-Komponente zerlegen. Dann können wir mit dem zweiten Newtonschen Gesetz die Beschleunigung und damit schrittweise die Geschwindigkeit und schließlich den Ort berechnen.

Wir setzen die große Masse in den Mittelpunkt unseres Koordinatensystems und lassen die kleine Masse bei (x_0, y_0) mit einer Anfangsgeschwindigkeit von (v_{x_0}, v_{y_0}) starten. Die wirkende Kraft zwischen beiden Massen lässt sich mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz beschreiben:

$$F = -\hat{G} \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (1)$$

Wobei \hat{G} die Gravitationskonstante, m und M die Massen der beteiligten Körper und r ihr Abstand ist. Haben wir die aktuelle Position (x,y) unserer kleinen Masse m gegeben, so können wir r berechnen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Hierbei gehen wir davon aus, dass die große Masse ortsfest ist und die resultierende Beschleunigung auf diese vernachlässigbar klein ist.

Nun müssen wir die Kraft noch in eine x- und y-Komponente zerlegen. Für diese gilt:

$$F_x = -\hat{G} \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \quad (3)$$

und

$$F_y = -\hat{G} \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{y}{r} \quad (4)$$

Das mache man sich anhand einer Skizze deutlich. Im Prinzip läuft es auf die Betrachtung zweier ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke (Ort- /Kräftedreieck) hinaus.

2 Simulation

Nun da alle Größen bekannt sind können wir mit der Simulation beginnen. Zusätzlich werden noch Schieberegler für den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und den Startwinkel gegenüber der x-Achse erstellt. Die Anfangsposition der kleinen Masse m legen wir mit $x(t_0)$ und $y(t_0)$ fest.

Zur Berechnung der x- und y-Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit aus dem Winkel sei noch zu erwähnen, dass Newton II im Bogenmaß rechnet. Wenn wir den Winkel im Gradmaß angeben wollen, so müssen wir noch mit folgender Beziehung umrechnen:

$$\frac{\alpha_{Grad}}{180^\circ} = \frac{\phi_{Bogen}}{\pi} \quad (5)$$

Durch Variation der Anfangsbedingungen können nun verschiedene Bahnkurven ausprobiert werden (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel). Gegebenenfalls muss der Berechnungszeitraum Δt erhöht werden und/oder das Berechnungsintervall d kleiner gemacht werden.